Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü1. Signale und deren Eigenschaften

1. Zeichnen und untersuchen Sie die angegebenen Signale auf folgende Eigenschaften:

Signalklasse, gerade/ungerade; links-, rechts-, zweiseitig; kausal/antikausal; Energie- oder Leistungssignal. (Energie oder Leistung sind zu berechnen!)

1a. Impulsfolge: Einheitsimpuls $\delta(k)$, $\delta(k-5)$

1b. Sprungfolgen: $\varepsilon(k)$, $\varepsilon(-k)$, $\varepsilon(1-k)$

1c. Rechteckimpuls $rect_T(t)$, Rampenfunktion $\rho(t)$

1d. Dreieckimpuls $\rho(t+T)-2\,\rho(t)+\rho(t-T)$

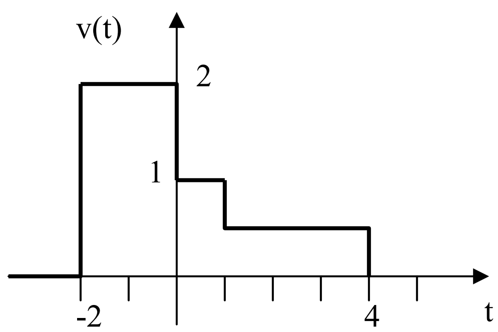
2. Gesucht sind der Real- und Imaginärteil, sowie der konjugiert gerade und ungerade Anteil des Signals: $\underline{v}(t) = \dfrac{1}{1+j\,t}$

3. Wie kann man einen Rechteckimpuls aus zwei Sprungfolgen bilden?

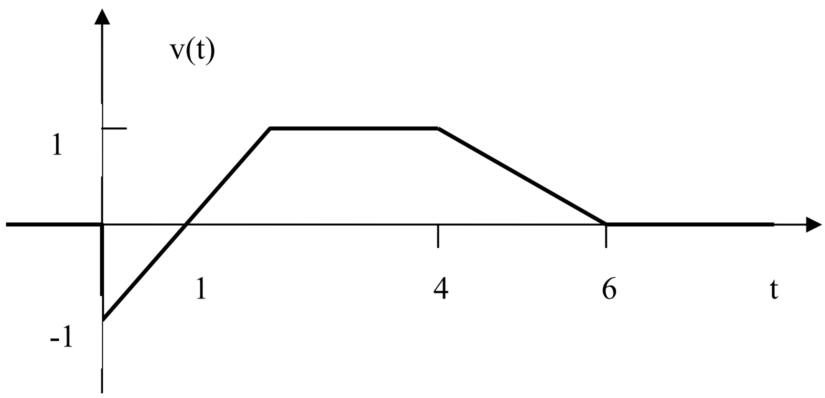
Unter welcher Bedingung ist der Rechteckimpuls eine gerade Funktion?

4. Stellen Sie die folgenden Signale nur mit Hilfe von Sprung- und Rampenfunktionen dar. Zerlegen Sie die Signale in geraden und ungeraden Anteil. Zeichnen Sie jeweils v(t-4).

4a:



4b:



Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü2. Verschiebung, Skalierung, usw. von Signalen

1. Gegeben ist $\underline{v}(\tau)$ (komplexes Signal):

(a) Wählen Sie für $v_R(\tau)$ und $v_I(\tau)$ beliebige Signale, und zeichnen Sie zusätzlich $\underline{v}(\tau-\tau_0)$ mit sinnvollen Zahlenwerten.

Zeichnen Sie ferner:

(b) $-\underline{v}^*(\tau-\tau_0)$

(c) $\underline{v}(-\tau)$

(d) $-\underline{v}(2\tau_0-\tau)$

2. Skalieren Sie das zeitbeschränkte Signal $\underline{v}(t)$ der Dauer 5 derart,

dass es auf die Dauer von 1 gestaucht bzw.

auf die Dauer 10 gedehnt wird. (Graphische Darstellung)

3. Periodische Signale: Beschreiben Sie ein periodisches Signal $v_P(\tau)$, indem Sie die Grundperiode τ_P des Signals $v(\tau)$ mit der periodischen Impulsfolge $Ш_{kp}(k)$ bzw. dem kontinuierlichen Impulskamm $Ш_{Tp}(t)$ unter Nutzung der Ausblendeigenschaften konstruieren.

4. Orthogonalität und Kollinearität: Prüfen Sie, ob (bzw. unter welchen Bedingungen) die folgenden Signale orthogonal, kollinear oder keines von beiden sind:

(a) $v_1(t) = \sin(\omega_0 t)$; $v_2(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$

(b) $v_1(k) = [\,1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ -1\ \ -1\ \ 1\,]$

$v_2(k) = [\,-1\ \ 1\ \ -1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ -1\,]$

$v_3(k) = [\,1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ 0{,}5\ \ 0{,}5\ \ 1\,]$

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü3. Einführung in die z-Transformation (zT)

1. Für die effektive Lösung der Differenzengleichung (dgl) benutzt man die

z-Transformation (zT): $$V(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k)\ z^{-k}$$

1.1 Versuchen Sie, sich diese Formel auswendig einzuprägen!

1.2 Erklären Sie anhand der zT den Begriff: Transformation!

1.3 Warum ist V(z) nicht mehr von k abhängig?

2. Berechnen Sie die zT folgender Funktionen (Zahlenfolgen) und geben Sie jeweils den zugehörigen Konvergenzbereich an:

2.1 $\delta(k)$ 2.2 $\delta(k - k_0)$

2.3 $\varepsilon(k)$ 2.4 $k\,\varepsilon(k)$ 2.5 $a^k\,\varepsilon(k)$ 2.6 $a^k\,\varepsilon(-k-1)$

2.7 $\varepsilon(k)\sin(\Omega_0 k)$ 2.8 $\varepsilon(k)\cos(\Omega_0 k)$

2.9 $a^{|k|}$ für $|a| < 1$, $k \in$ {ganze Zahl}

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü4. Anwendung der z-Transformation (zT)

Nach einer erfolgreichen Unternehmensgründung gelingt es Ihnen, jährlich das investierte Kapital (Ka) zu verdoppeln. Allerdings fallen auch Kosten (Ko) an, die linear mit der Zeit steigen. Zur Verdeutlichung sei der Kapitalstand am Ende der ersten Jahre angegeben:

0	1	2	3	4	…
Ka	2Ka-Ko	2(2Ka-Ko)-2Ko	2[(2Ka-Ko)-2Ko]-3Ko	2{ … }-4Ko	

1. Wie lautet die (rekursive) Beziehung zur Bestimmung des Kapitalbestandes am Ende des nächstfolgenden Jahres?

y(0) = Ka, y(1) = … , y(2) = … , y(3) = … , y(4) = … , y(5) = …

y(k) =

2. Berechnen Sie die Kapitalbestände am Ende der ersten 10 Jahre unter den Bedingungen: Ka=100 und Ko=10.

3. Die tabellarische (rekursive) Beschreibung des Problems (in der Zeitebene) ist keine „geschlossene Lösung" des Problems. Versuchen Sie z.B. den Kapitalbestand am Ende des 100. Firmenjubiläumsjahres zu berechnen (mit Hilfe der rekursiven Formel für y(k)).

4. Bilden Sie die zT der Differenzengleichung. Bestimmen Sie: Y(z) = zT{ y(k)}.

5. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion: Y(z)/z.

6. Die Rücktransformierte: zT^{-1} {Y(z)} liefert die nichtrekursive, geschlossene Lösung des Problems. [Y(z) lässt sich als H(z) interpretieren, da X(z) = zT^{-1}{h(k)}=1 ist.]

7. Wie groß ist also der Kapitalbestand am Ende des 100. Firmenjubiläumsjahres?

8. Vergleichen Sie Kapitalbestände am Jahresende mit den Zahlen, die ohne Kosten entstanden wären.

9. Nehmen die Kapitaleinbußen durch die Kosten mit der Zeit relativ zu oder ab?

10. Wie kann man das Ergebnis nach 9 erklären?

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü5. Diskrete Faltung

Die diskrete Faltung erfolgt nach der Rechenvorschrift:

$$y(k) = h(k) * v(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\ v(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v(i)\, h(k-i)$$

Darin bedeuten h(k) die Impulsantwort des Systems und v(k) die Eingangszahlenfolge.

1. **D**a die Faltung eine lineare Operation ist, lässt sich die Distributivität leicht beweisen:

$$v(k) * [a\, h(k) + b\, g(k)] = a\, v(k) * h(k) + b\, v(k) * g(k)$$

2. **G**egeben sind die Impulsantwort: $h(k) = \delta(k) + \frac{2}{3}\,\delta(k-1) + \frac{1}{3}\,\delta(k-2)$

und die Eingangszahlenfolge: $v(k) = \frac{2}{3}\,\delta(k) + 1\frac{1}{3}\,\delta(k-1) + \frac{1}{3}\,\delta(k-2)$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltung graphisch die Ausgangszahlenfolge: y(k)

Es existieren zwei Lösungswege:

(a) Entsprechend der Rechenvorschrift und:

(b) Betrachten Sie v(k) als Reihe von Impulsen, bestimmen Sie die jeweilige Impulsantwort und addieren Sie die Impulsantworten.

3. **G**egeben sind die Zahlenfolgen:

$v_1(k) = \delta(k-1) + 2\,\delta(k-2) + \delta(k-3)$ und

$v_2(k) = \delta(k) - \delta(k-4)$

Wie lautet die z-Transformation $Y(z) = zT\,\{v_1(k) * v_2(k)\}$?

Bestimmen Sie das Ergebnis der Faltung durch Rücktransformation von Y(z) in den Zeitbereich, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der direkt im Zeitbereich ausgeführten Faltung.

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü6. Der Cosinusgenerator

1. Der Cosinusgenerator erzeugt als Impulsantwort die Abtastwerte der Cosinusfunktion:

$$h(k) = \cos (\Omega_0 k)$$

Berechnen Sie die zT von h(k). (Wurde schon in Ü3 vorgerechnet!)

2. Skizzieren Sie das Pol/Nullstellen-Schema der Übertragungsfunktion: H(z).

Welche Bedeutung hat die Lage der Polstellen für die Stabilität des Systems?

Was ist ein grenzstabiles System?

3. Realisieren Sie die Übertragungsfunktion H(z) mit einem einfachen diskreten System aus Addierern, Multiplizierern und Verzögerern. Warum muss das System rekursiv sein?

Diskutieren Sie den Aufwand: Anzahl der Verzögerer, Addition mehrerer Summanden.

4. Kanonischen Realisierungen:

4.1. Geben Sie die Direktform an.

4.2. … die transponierte Direktform

4.3. … die Produktform

4.4. … die Parallelform

5. Vertiefende Fragen:

5.1. Gibt es mehr als 4 kanonische Realisierungen?

5.2. Was ergibt ein Aufwandsvergleich der vier Realisierungen?

5.3. In einer Simulierung mit einem Digitalrechner tritt das Problem der endlichen Stellenzahl reeller Zahl auf. Welche Folgen kann die Verwendung gerundeter, diskreter Werte für den

Cosinusgenerator haben?

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü7 und Ü8. Zustandsraumdarstellung: ZRD

Ü7:

1. Gegeben sind die Grundgleichungen der Zustandsraumdarstellung für ein SISO-System:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\,v(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T\,\mathbf{x}(k) + d\,v(k)$$

Was bedeuten die Variablen: $v(k)$, $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k+1)$ und $y(k)$?

Welches sind unabhängige, welches abhängige Variable?

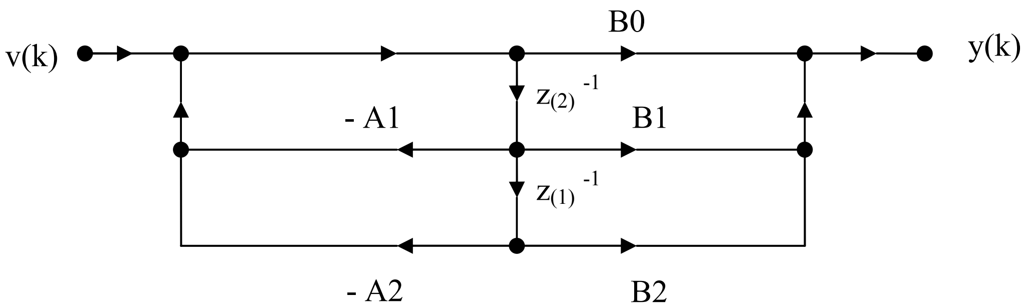
Wie nennt man die Vektoren: **b**, **c**? Welche Bedeutung hat die Konstante d?

Wie nennt man die Matrix **A**? Wie werden die Zustandsspeicher beschrieben?

Welche Dimensionen haben die Matrizen und Vektoren?

2. Schreiben Sie für den Fall eines Systems der Ordnung 2 die Bestimmungsgleichungen für die Komponenten von **A**, **b** und **c** auf. Wie bestimmt man die Konstante d?

3. Gegeben ist folgender Signalflussgraph:



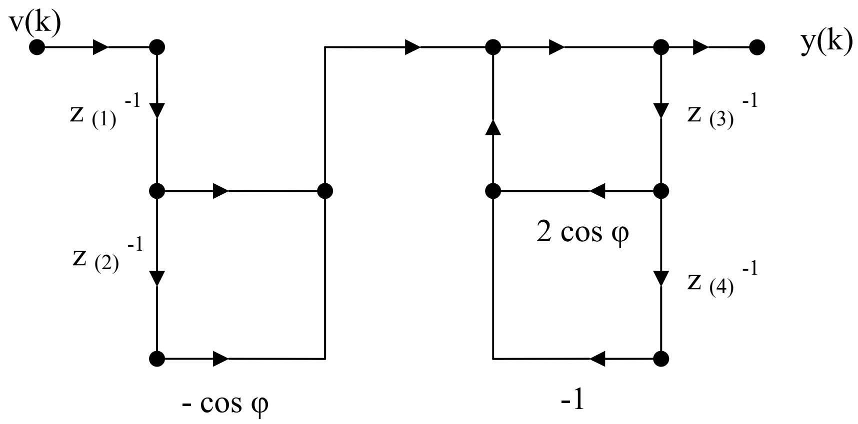
Bestimmen Sie: **A**, **b**, **c** und d?

4. Gesucht ist die Impulsantwort h (k) des Systems von Aufgabe 3?

k	
$\delta(k)$	
$x_2(k+1)$	
$x_2(k)$	
$x_1(k+1)$	
$x_1(k)$	
$h(k)$	

Ü8:

1. Gegeben ist der SFG eines kausalen Systems:



Ist die Struktur kanonisch?

2. Wie lautet die Differenzengleichung?

3. Wie lautet die Übertragungsfunktion H(z)? Stabilität? Konvergenzbereich?

4. Zeichnen sie den SFG der ersten beiden kanonischen Realisierungen.

5. Wie groß sind die Übergangsmatrix **A** (bzw. **A'**), die Vektoren **b** (bzw. **b'**), **c** (bzw. **c'**) und der Skalar d (bzw. d') der Zustandsraumdarstellungen?

Zusatzaufgabe: zu Ü7 – 3

Der Ausgangsvektor lautet <u>nicht</u> $\mathbf{c}^T = [B2 \quad B1]$, wie man anschaulich meinen könnte.
Zeichnen Sie einen neuen Signalflussgraph, der die richtige Lösung für $\mathbf{c}^T$ anschaulich sichtbar werden lässt.
Methode: Vollständige Reduktion des SFG'en durch Eliminierung aller internen Knoten. Erlaubt sind dann noch der Ein- und Ausgangsknoten, sowie die Zustandsknoten des aktuellen und zukünftigen Zustandes.

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü9 und Ü10. Übertragungsfunktion und Zustandsraumdarstellung:

Ü9: Übertragungsfunktion H(z), abgeleitet aus der ZRD

1. Sind von einem System die Zustandsübergangsmatrix, die Ein- und Ausgangsvektoren und der Durchgriff gegeben, kann die Übertragungsfunktion aus folgender Beziehung bestimmt werden (Herleitung s. Vorlesung):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \mathbf{c}^T \, (z\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \, \mathbf{b} + d$$

<u>Zunächst folgen Übungen zur Matrixinversion (Kehrmatrix).</u>

Im Falle eines Systems 2. Ordnung: $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ mit $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$ kann $\mathbf{x}$ durch einfache Rechnung bestimmt werden. Berechnen Sie die Kehrmatrix $\mathbf{A}^{-1}$.

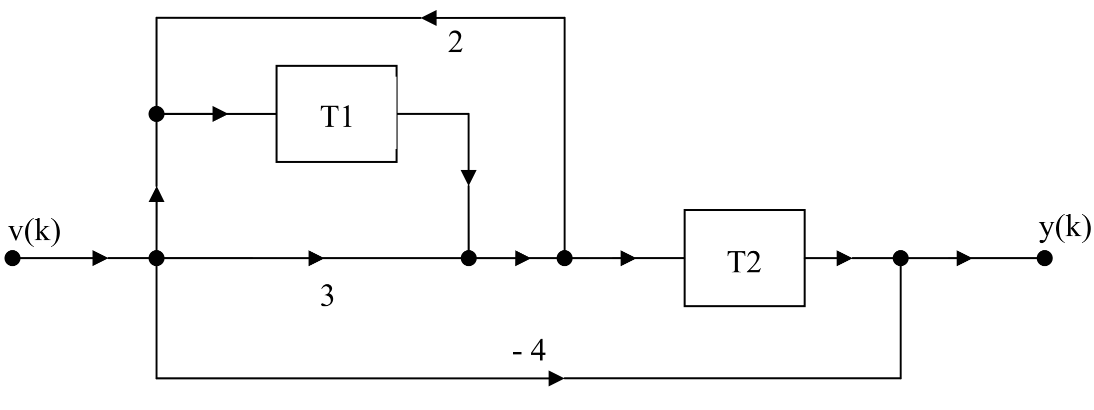
Allgemein gilt für die Elemente einer invertierten n x n-Matrix: $(\mathbf{A}^{-1})_{jk} = (\mathbf{ADJ})_{kj} / \det \mathbf{A}$

Das Element der Kehrmatrix $\mathbf{A}^{-1}$ in der j. Zeile und k. Spalte ist gleich dem Element der Adjunkten **ADJ** der k. Zeile und j. Spalte, dividiert durch die Matrixdeterminante (det **A**). Die Elemente der Adjunkten sind gleich der Determinante, die durch Streichen der k. Zeile und j. Spalte entsteht, multipliziert mit dem Vorzeichen $(-1)^{j+k}$.

Bestimmen Sie die Kehrmatrizen zu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben ist folgender Signalflussgraph:



2.1. Bestimmen Sie die ZRD.

2.2. Wie lautet die Übertragungsfunktion H(z)? (Benutzen Sie die gegebene Formel!)

2.3. Ist das System stabil?

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü10: Die graphische Darstellung des Frequenzganges der Übertragungsfunktion H(z)

Mit Hilfe der folgenden Substitution kann der Frequenzgang der Übertragungsfunktion H(z) bestimmt werden: $z = e^{j\Omega}$ mit $\Omega = \omega/f_A = 2\pi f/f_A = 2\pi f T$, also die „auf die Abtastfrequenz normierte Kreisfrequenz".

1. Beweisen Sie, dass Betrag und Phase von $H(e^{j\Omega})$ eine 2π- Periodizität besitzen.

2. Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion: $H(z) = \frac{(z+2)^2}{(z+\frac{1}{2})^3}$

Bestimmen Sie die Eigenschaften von $|H(e^{j\Omega})|$ und $\varphi(\Omega)$

a. Berechnen Sie $|H(e^{j\Omega})|$ und $\varphi(\Omega)$ für $0 \leq \Omega \leq 180°$ mit $\Delta\Omega = 10°$ (mit einem Rechner, ausnahmsweise).

b. Zeichnen Sie $|H(e^{j\Omega})|$ und $\varphi(\Omega)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

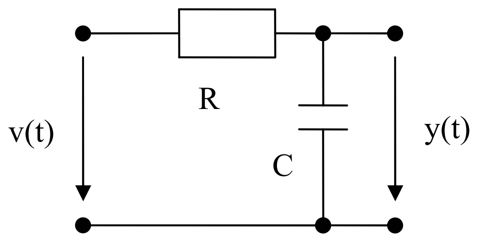
c. Diskutieren Sie die Auswirkungen, wenn sich der dreifache Pol bei $z_\infty = -\frac{1}{2}$ dem Wert $z_\infty = -1$ annähert und ihn schließlich annimmt.

3. Geben Sie sich selbst eine Übertragungsfunktion H(z) vor, und bestimmen Sie die Eigenschaften von $|H(e^{j\Omega})|$ und $\varphi(\Omega)$ (mit Hilfe einer „Kurvendiskussion"). Interpretieren Sie die Ergebnisse anschaulich.

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü11: Kontinuierliche/ Diskrete Systeme: TP_1

Gegeben ist folgende analoge Schaltung:



1. Wie lautet die zugehörige Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)}$?

2. Zeichnen Sie das zugehörige Pol-/Nullstellen (P/N)-Schema von H(s) (mit Amplitudenfaktor).

3. Bestimmen Sie die zugehörige Impulsantwort h(t) (Laplace-Transformation am Ende Aufgabe).

4. Skizzieren Sie diese Impulsantwort h(t).

5. Mit Hilfe der Impulsantwort h(t) (und dem Faltungsintegral) kann die Sprungantwort bestimmt werden. **S**kizzieren Sie das Ergebnis.

Bilden Sie eine <u>diskrete Zahlenfolge</u> v(k) so, dass mit $\tau = R\,C = 1$ der Wert von $v(10) = e^{-1}$ beträgt.

6. Wie groß sind dann v(0), v(1) und v(5)?

7. Berechnen Sie die zT von v(k) (z-Transformation: am Ende Aufgabe).

8. Wie lautet die zugehörige Differenzengleichung des diskreten Systems, das v(k) als Impulsantwort besitzt?

9. Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild des diskreten Systems.

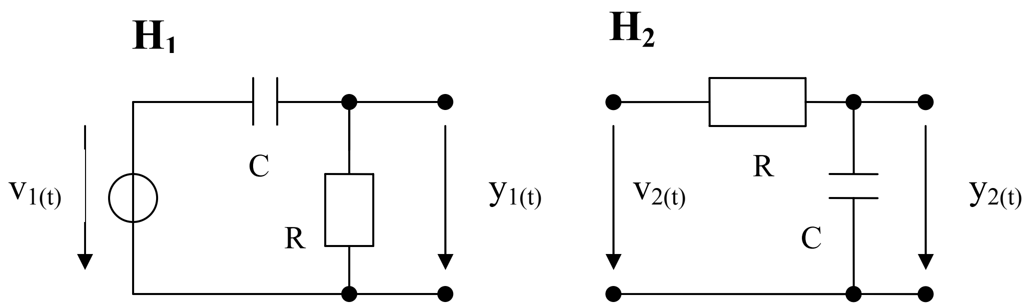
<u>Korrespondenzen:</u>

$$\frac{1}{(1+a\,s)} \leftrightarrow \frac{1}{a}\,e^{-\frac{t}{a}} \qquad\qquad a^k\,\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü12. Kontinuierliche Signale und Systeme: HP_1 -TP_1

1. **G**egeben sind folgende analoge Schaltungen:



1 Wie lauten die Übertragungsfunktionen $H_1(s)$ und $H_2(s)$?

2. Bestimmen Sie die Gesamtübertragungsfunktion: $H(s) = H_1(s)\ H_2(s)$.

Wie nennt man die Art der Zusammenschaltung?

3. Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellen (P/N)-Schema von H(s).

4. Berechnen Sie die Sprungantwort der Gesamtschaltung.

5. Skizzieren Sie die Sprungantwort der Gesamtschaltung.

6. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems H'(s), dessen Impulsantwort identisch ist mit der Sprungantwort des Systems H(s) gemäß 4.

7. Skizzieren Sie die zugehörige Schaltung.

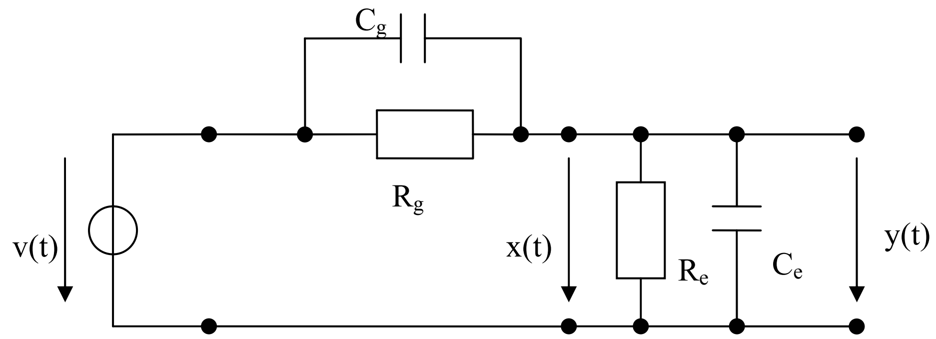
Korrespondenzen:

$$\frac{1}{(1+a\,s)^2} \leftrightarrow \frac{1}{a^2}\,t\,e^{-\frac{t}{a}} \qquad\qquad \frac{s}{(1+a\,s)^2} \leftrightarrow \frac{1}{a^3}\,(a-t)\,e^{-\frac{t}{a}}$$

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü13: Kontinuierliche Systeme: Komplexer Spannungsteiler

Gegeben ist folgende analoge Schaltung:



1. Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsspannung y(t) als Funktion der Eingangsspannung: $v(t) = 5V\,\varepsilon(t)$. Elementewerte: $R_g = 1k\Omega$, $C_g = 0$, $R_e = \infty$, $C_e = 1$ nF

2. Ermitteln Sie den Zeitpunkt $t_{½}$ für den gilt: $y(t_{½}) = ½\ y_{max}$

3. Normieren Sie die in 1. ermittelte Ausgangsspannung y(t) auf 5V und tasten Sie das normierte Signal mit $f_A = 1$ MHz ab. Wie lautet die resultierende Ausgangssignalfolge y(k)?

Für die nachfolgenden Aufgaben sollen <u>alle</u> Elemente berücksichtigt werden.

4. Wie lautet allgemein die Übertragungsfunktion des Systems H(s)?

5. Bestimmen Sie den Frequenzgang H(jω) des Systems für

a) $\omega \rightarrow 0$ b) $\omega \rightarrow \infty$

6. Skizzieren Sie das Bodediagramm für: $\tau_e = R_e\ C_e \approx 10\ \tau_g = 10\ R_g\ C_g$

7. Zeichnen Sie das P/N-Schema des Systems mit der Übertragungsfunktion H(s) gemäß 4. in allgemeiner Form unter der Vorgabe $\tau_e \approx 10\ \tau_g$.

8. Warum bestehen das Bodediagramm aus zwei und das P/N-Schema nur aus einem Diagramm?

9. Unter welcher Bedingung gilt, dass der Frequenzgang H(jω) des Systems reell ist (unabhängig von der Frequenz)? Welche Werte haben dann: τ_e, τ_g, H(s) und H(jω)?

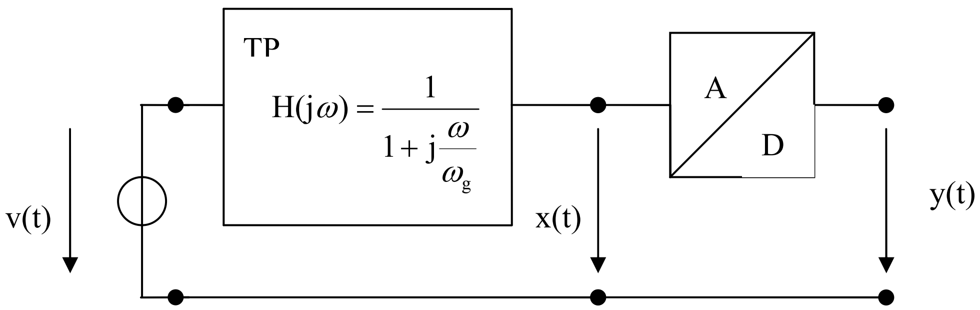
<u>Korrespondenz:</u>

$$\frac{1}{s\,(1+a\,s)} \Leftrightarrow (1-e^{-\frac{t}{a}})$$

Übungen zur Vorlesung: Signale und Systeme

Ü14: Kontinuierliche/ Diskrete Systeme: Auswirkung der analogen Bandbreite auf die Genauigkeit der A/D-Konversion

Gegeben ist die Überlagerung von 5 sinusförmigen Signalen mit 2, 4, 6, 8, 10 MHz. Die Amplituden sind linear fallend von 10 V (2 MHz) bis 1 V (10 MHz). Das vorgegebene Summensignal soll gefiltert (Antialiasingfilter) und abgetastet (A/D-Konverter) werden:



1. Berechnen Sie die Amplituden der Spektralanteile bei 4, 6 und 8 MHz.

2. Der eingezeichnete Tiefpass ist ein Tiefpass 1. Ordnung. Er hat die Grenzfrequenz: $f_g = 6\,\text{MHz}$. Berechnen Sie den Betrag der Verstärkungen bei den gegebenen Signalfrequenzen. (Numerische Angaben sind am Ende dieser Aufgabe zu finden!)
Wie groß ist relative Amplitudenfehler Δ (in %)?

F	2 MHz	4 MHz	6 MHz	8 MHz	10 MHz
$\lvert H(j\omega)\rvert$					
Δ (in %)					

3. Bestimmen Sie die Formel für die notwendige Grenzfrequenz f_g, damit ein vorgegebener Amplitudenfehler Δ nicht überschritten wird.

4. Die Formel nach 3. soll durch die Näherung: $\frac{1}{(1-\Delta)^2} \approx 1 + 2\Delta$ vereinfacht werden. Wie lautet die Näherungsformel?

5. Wie groß muss die Grenzfrequenz gewählt werden, damit der maximale Fehler $\Delta \le 0{,}5\,\%$ (sinnvoll für 8bit ADC) nicht überschritten wird?

6. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H(s) des Antialiasingfilters und zeichnen Sie das zugehörige P/N-Schema.

7. Bestimmen Sie die minimal erforderliche Abtastfrequenz, damit das kontinuierliche Signal eindeutig wieder aus den Abtastwerten rekonstruiert werden kann.

<u>Numerische Angaben:</u>

$\frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}95$ $\quad\quad$ $\frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}83$ $\quad\quad$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ $\quad\quad$ $\frac{3}{\sqrt{34}} = 0{,}51$